<u>Урок исследование</u>

Перпендикулярность прямой и плоскости.

<u>Цель урока</u>: Показать множественность подходов к доказательству теоремы; совершенствовать исследовательские умения и навыки учащихся.

<u>Подготовка к уроку</u>: ученики-консультанты дома готовят по дополнительной литературе семь доказательств признака перпендикулярности прямой и плоскости.

<u>Ход урока</u>: I

Вступительное слово учителя:

Сегодняшний урок – урок исследования. Всем вместе предстоит в процессе решения задач и ответов на проблемные вопросы, подойти к формулировке теоремы перпендикулярности прямой и плоскости и познакомиться с семью вариантами доказательств этой теоремы с тем, чтобы выбрать наиболее оптимальный из них, обстоятельно мотивировать своё мнение.

1.Подготовка к формулировке теоремы:

Повторение определения перпендикуляра к плоскости, анализ практического применения данного понятия посредством решения задач.

Задача 1.

Даны: Плоскость α , точки A и B в этой плоскости; AM – прямая перпендикулярная этой плоскости. Определить вид треугольника AMB.

Задачи по вариантам.

I

Дан плоский четырёхугольник ABCD. AM – перпендикуляр к плоскости ABCD. Какие из треугольников ABC, ACD, ABD, BCD, ADM, ABM, CAM – прямоугольные.

II

ABCD – квадрат. Прямая BK перпендикулярна плоскости квадрата. Какие из треугольников ABD, BCD, ABK, BDK, BCK – прямоугольные.

Консультанты собирают листочки и проверяют решения, а учитель подводит учащихся к выводу:

1.Верно ли утверждение, что прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна любой прямой лежащей в этой плоскости?

2.Когда же прямая перпендикулярна плоскости?

3.Сколько прямых лежат на плоскости? Можно ли их посчитать?

Далее учитель создаёт проблемную ситуацию, в основе которой – поиск ответа на вопрос: Сколько прямых достаточно в плоскости, чтобы можно было сказать, что прямая перпендикулярна плоскости?

Ученик – консультант на модели из спиц показывает различные варианты: в плоскости две прямые в плоскости, прямая перпендикулярна одной из них. **Вывод:** прямая не перпендикулярна плоскости. Следующий вариант модели: прямая перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости, и, оказывается, перпендикулярна плоскости. Далее для закрепления, можно взять модель из трёх прямых и т. д.

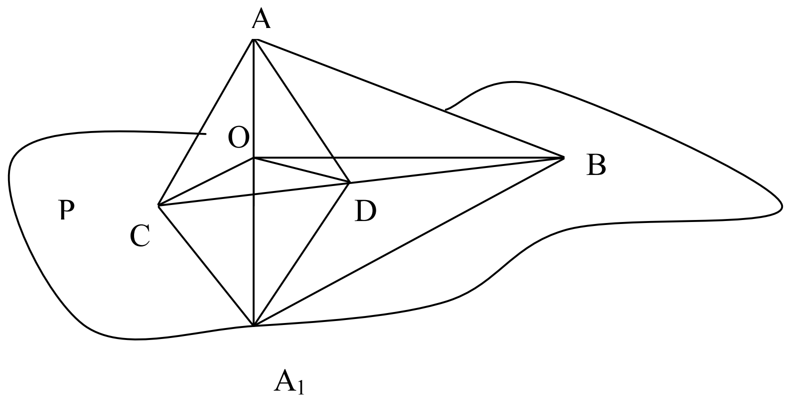
По завершению работы с моделями перед учащимися ставится очередной проблемный вопрос: сколько прямых достаточно в плоскости, чтобы сказать, что прямая перпендикулярна плоскости?

Исследовав ситуацию перпендикулярности прямой и плоскости, мы в плотную подошли к теореме, которая даст возможность выяснить на чертежах, на моделях и в практика перпендикулярность к прямой и плоскости. Попробуем сформулировать теорему.

Ребята предлагают свои варианты формулировки теоремы. Учитель выделяет наиболее рациональнее и предлагает прослушать различные варианты формулировки и доказательства рассматриваемой теоремы, которые ученик разыскали дома в рекомендованной литературе.

2. Доказательство теоремы:
I вариант автор А.П. Киселев

Теорема: *Если прямая, пересекающаяся с плоскостью, перпендикулярна каким - нибудь двум прямым, проведённым на этой плоскости через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой проведённой в этой плоскости через ту же точку пересечения.*



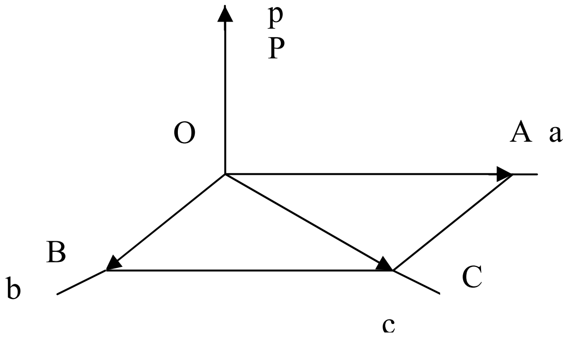
Доказательство: Отложим на прямой AA_1 произвольной длины, но равные отрезки OA и OA_1 и проведём на плоскости какую-нибудь прямую, которая пересекла бы три прямые исходящие из точки O в точках C, D, и B .Эти точки соединим с точками A и A_1; мы получим несколько треугольников.$\Delta ACB = \Delta A_1CB$, так как у них BC - общая, $AC=A_1C$ - как наклонные к прямой AA_1, одинаково удаленые от основания O перпендикуляра OC. По той же причине $AB=A_1B$.Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABC=\angle A_1BC$.

$\Delta ABD=\Delta A_1BD$ по первому признаку равенства треугольников: BD - общая, $AB=A_1B$ по доказанному, $\angle ABC= \angle A_1BC$.Из равенства этих треугольников следует, что $AD=A_1D$.

ΔAOD=ΔA1OD по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства этих треугольников следует, что AOD= A1OD; и так как эти углы смежные, то AA1 перпендикулярна OD.

II вариант. Автор М.И.Башмаков

Теорема: *Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости, перпендикулярна плоскости.*



Первый случай, когда все прямые a, b, c проходят через точку O – точку пересечения прямой с плоскостью α. Отметим на прямой p вектор OP, на прямой c вектор OC и докажем, что произведение векторов OP и OC равно 0.

Разложим вектор OC по векторам OA и OB, расположенные соответственно на прямых a и b; тогда (речь идет о векторах) OC=OA+OB. Значит:

$$OP\cdot OC=OP\ (OA+OB)=OP\cdot OA+OP\cdot OB$$

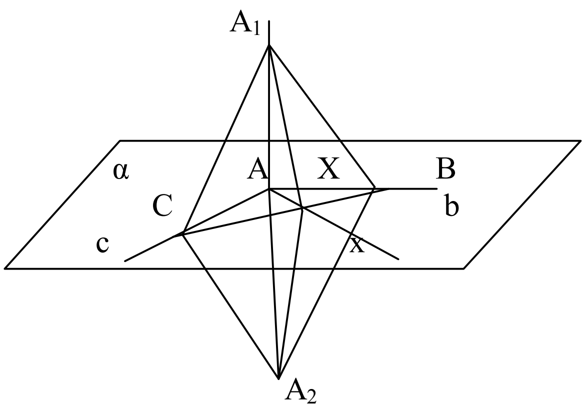
Но $OP \perp OA$, $OP \perp OB$; поэтому $OP\cdot OA=0$, $OP\cdot OB=0$. Отсюда $OP\cdot OC=0$; значит $OP \perp OC$ и $p \perp c$. Но c – любая прямая плоскости; значит, $p \perp \alpha$

Второй случай, когда прямые a, b, c не проходят через точку O. Проведем через точку O прямые $a1||a$; $b1||b$; $c1||c$. По условию $p \perp a$, $p \perp b$, значит $p \perp a1$, $p \perp b1$, и, по доказанному выше, $p \perp c1$, а поэтому $p \perp c$. Прямая c – любая прямая плоскости α; значит прямая p перпендикулярна ко всем прямым, лежащим в плоскости α, а поэтому $p \perp \alpha$.

III вариант. Автор А. В. Погорелов.

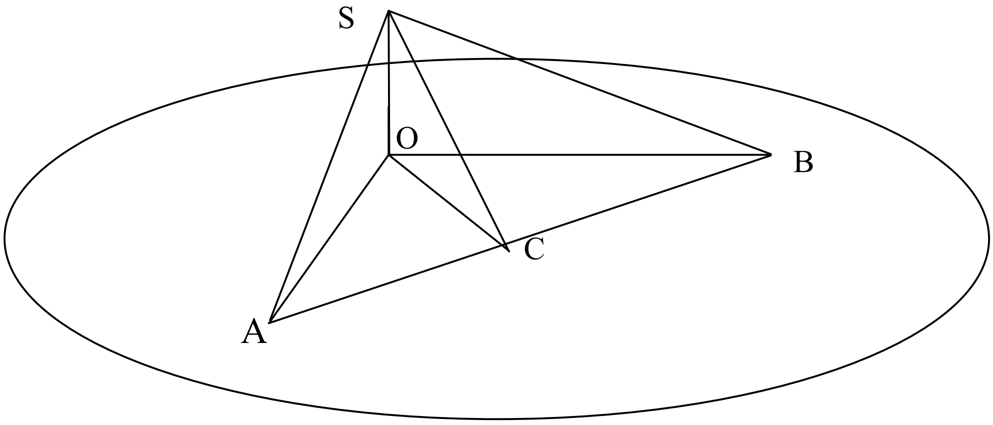
Теорема: *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.*

Доказательство можно взять из учебника А.В. Погорелов «Геометрия 7-11»



IV вариант Э.Е. Лежандр

Теорема: *Прямая перпендикулярная двум прямым, лежащим на плоскости, перпендикулярна самой плоскости.*

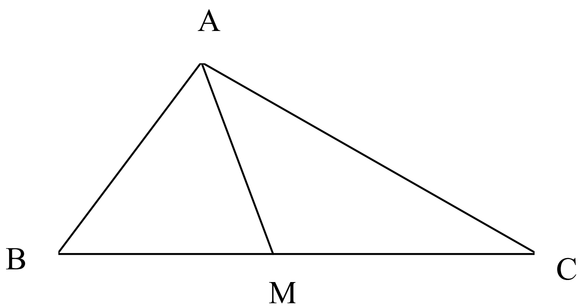


Дано: SO⊥OA, SO⊥OB, OA C α.,OB C α

Доказать: SO⊥α

Доказательство:

1. Медиану треугольника можно выразить через стороны

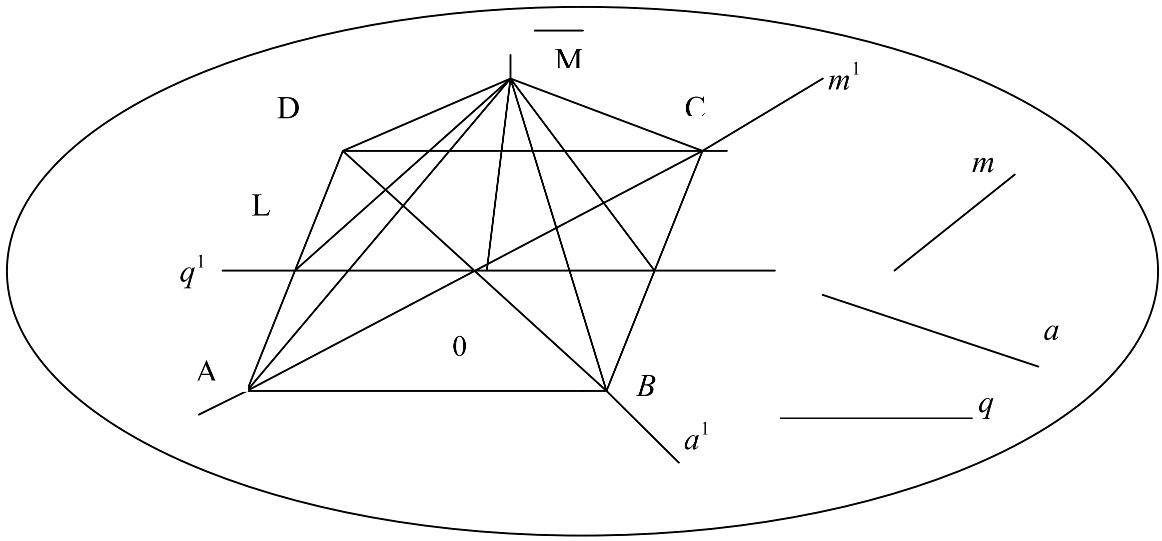


$$4AM^2=2(AB^2+AC^2)-BC^2$$

2 Через точку C проведём прямую так, чтобы отрезок AB, заключённый между сторонами угла AOB, разделился бы в этой точке пополам, то есть AC=BC. SC – медиана треугольника ASB: $4SC^2=2(SA^2+SB^2)-AB^2$. OC – медиана треугольника AOB: $4OB^2=2(AO^2+OB^2)-AB^2$. Почленно вычитая эти равенства, получим: $4(SC^2-OC^2)=2((SA^2-AO^2)+(SB^2-OB^2))$. Выражение в скобках в правой части равенства можно заменить по т. Пифагора. Для треугольника AOS: $SO^2=SA^2-OA^2$. Для треугольника BOS: $SO^2=SB^2-OB^2$. Отсюда: $4(SC^2-OC^2)=2(SO^2+SO^2)$, $4(SC^2-OC^2)=4SO^2$, $SC^2-OC^2=SO^2$, откуда $SC^2=SO^2+OC^2$. Согласно обратной теоремы Пифагора, SO⊥OC. OC – произвольная прямая, принадлежащая плоскости α, значит SO⊥α.

V вариант автор О.К. Яковлев.

Теорема: *Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых лежащих в плоскости, то эта прямая перпендикулярна плоскости.*

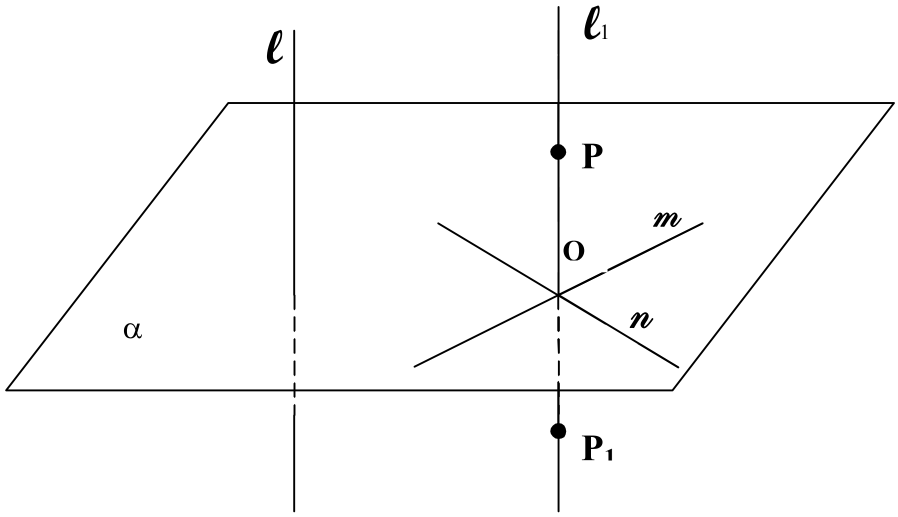


Докажем, что прямая l перпендикулярна любой третьей прямой в плоскости α

1. Построение: Прямые m, n, g перенесем параллельно в точку O; OA=OC=OD=OB, отсюда ABCD – прямоугольник, соединим A, B, C, D с некоторой точкой M.
2. Треугольник AMD равен BMC по трем сторонам, отсюда угол1 равен углу2. Треугольник MDL равен треугольнику MKB по двум сторонам и углу между ними. MD=MB, LD=BK – центрально симметричны; следовательно MK=LM.
3. Треугольник MLK – равнобедренный, OM – медиана, значит, и высота. Получили OM ⊥g, отсюда l ⊥ g, следовательно l ⊥ α

VI вариант автор И.В. Фетисов.

Теорема: *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым на плоскости, то она перпендикулярно самой плоскости.*



Доказательство основано на симметрии относительно оси плоскости.

1. Построение: $\ell \parallel \ell_1$, m. $O \in \ell_1$, $m \cap n = O$, OP=OP' .
2. Точки P и P' – симметричны относительно оси m, также P и P' – симметричны относительно оси n. Тогда $\alpha((m \cap n) \subset \alpha)$ – плоскость симметрии точек P и P', следовательно, $\ell \perp \alpha$

VII вариант автор Атанасян (разобрать самостоятельно по учебнику).

3.Обсуждение различных вариантов доказательства теоремы. Учащиеся высказываю свои мнения о том, какое из доказательств, на их взгляд, является оптимальным и почему. Учитель разрешает выбрать для себя любой вариант и увязывает теорему с примерами из жизни: В технике часто встречается направление, перпендикулярное плоскости. Колонны устанавливают так, что их ось перпендикулярна плоскости фундамента; гвозди забивают в доску так, что они перпендикулярны плоскости доски; в цилиндре паровой машины шток перпендикулярен плоскости поршня и т.д. Особенно важно вертикальное направление, то есть направление силы тяжести, оно перпендикулярно горизонтальной плоскости.

Задача: ABCD – ромб, прямая OK перпендикулярна диагоналям ромба.
Доказать: OK перпендикулярна плоскости ромба.

Итог урока.
Задание на дом: п17, №120, №129